

۱۲۳- اگر $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس عبادت $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد اندازه ی n کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

مسئله داریم تعداد یک های ماتریس عبادت یک لاف ساده برابر است با ۲۹، پس در این لاف با توجه به ماتریس عبادت آن داریم: $q=2 \rightarrow 2^q-1=3$

۱۲۴- اگر عدد (2^n-3^n) مضرب ۲۵ باشد، کوچک ترین عدد طبیعی n کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱ (۱) ۱۰ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴) ۲۰ (۵) ۲۰ (۶)

$$2^7 - 1 \rightarrow 2^n \equiv 1 \pmod{25}$$

چون $(2^6, 25) = 1$ پس طبق تلم اقلیدس داریم:

تکته (قضیه اولیور): اگر n عددی طبیعی و a عددی صحیح باشد به طوری که $(a, n) = 1$ آن گاه

$$\phi(25) \equiv 1 \pmod{25}$$

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^6 \equiv 1 \pmod{25} \\ \phi(25) = 25(1 - \frac{1}{5}) = 20 \end{array} \right.$$

پس $n=20$ قابل قبول است. درسته از آنجا که کوچک ترین عدد طبیعی n مطلوب است باید مقوم علیه های طبیعی n را نیز مقایسه کنیم. که $n=10$ داریم:

$$2^{10} \equiv 1 \pmod{25}$$

۱۲۵- به چند طریق می توان ۱۳۰۰ ریال سکه های ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی خرید؟ (ریاضی ۹۱)

۱ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶ (۵)

تعداد سکه های ۱۵۰ و ۲۵۰ ریالی را به ترتیب x و y در نظر می گیریم.

$$150x + 250y = 1300 \rightarrow 3x + 5y = 13$$

بنابراین $x=3$ و $y=1$ یک جواب اولیه بود که این معادله است. جواب های دیگر این معادله عبارتند از:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \frac{bk}{d} \\ y = y_0 - \frac{ak}{d} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 5k \\ y = 1 - 3k \end{array} \right.$$

معادله x را در y جایگزین می‌کنیم.

$$\begin{cases} x = 2 + 5k \geq 0 \rightarrow k \geq 0 \\ y = 13 - 3k \geq 0 \rightarrow k \leq 4 \end{cases}$$

تفاوت معادله x و y برابر ۱۱ است. پس به ۵ طریق می‌توان مقبر خرید.

۱۶۶- اگر d و c رطوبت $A = 4$ و رطوبت A هم ارز می‌شود. A با کمترین درجه آ در تمام ساده‌ی متناظر آن می‌توان یافت؟ (رایانه ۹۱)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

صورت سؤال درست بیان نکرده است. برآورد متناظر باید رابطه توانی تحت داشته باشد که در صورت سؤال به صورت برآورد ساده معرفی شده است. در ضمن برای هر سؤال برآورد تحت در تمام آن درجه‌ای یکسان تعریف کرد. اصولاً این حالت صورت ورودی ما فرجه و یا طبقه هستند.

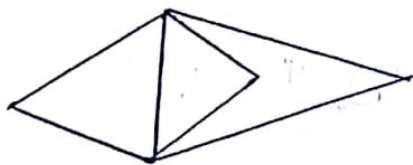
۱۶۷- با دران مجرای عمقات به اندازه مناسب، معادله $\sqrt{3xy} + y^2 = 1$ به تمام صورت نوشته می‌شود؟ (رایانه ۹۲)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

$$t^2 - (a+c)t - \frac{\Delta}{2} = 0 \rightarrow t^2 - t - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{3}{2} \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 = 1 \rightarrow 3x^2 - y^2 = 2$$

۱۶۸- اگر A ماتریس معادرت برآورد G و درایه‌های واقع در سطر A و ستون A^T اعداد «۲ و ۲ اولی و ۲» باشند، برآورد G دارای چند دور است؟ (رایانه ۹۲)

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)



در حالت $\sqrt{3}$ برآورد داده شده است. مطابق شکل این برآورد $\sqrt{3}$ دور به طول ۳ و $\sqrt{3}$ دور به طول ۴ دارد.

۱۶۹- عدد چهار رقمی \overline{aabb} مربع کامل است. باجه مانده ی قسم عدد دورقمی \overline{ab} بر عدد ۱۳ برابرم است؟ (رایضه ۹۲)

۱۱ ۹ ۱۰ ۱۳ ۱۱ ۱۳ ۱۲ ۱۴

$$\overline{aabb} = 100a + 100a + 10b + b = 11(100a + b) = k^2 \rightarrow 100a + b = 11m^2 \rightarrow a=7, b=8$$

$$\overline{ab} = 78 = 5(3) + 9 \rightarrow r=9$$

۱۷۰- در تقسیم عدد طبیعی سرزمنی a بر عدد طبیعی b خارج قسمت ۲۱ و باقیمانده ۱۷ می باشد، چند عضو از مجموعه جواب های a مقرب ۵ می باشند؟ (رایضه ۹۲)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

$$a = 21b + 17, r < b \rightarrow \boxed{17 < b}, 21b + 17 < 1000 \rightarrow \boxed{b \leq 45} \rightarrow$$

$$b = 18 \rightarrow a = 396; b = 23 \rightarrow a = 495$$

۱۷۱- درجه رأس های براف ساده و همبند a و b در a و b و c هستند. اگر m تعداد رأس های براف a و n تعداد رأس های براف b و $p = \frac{3}{2}m$ باشد، تعداد جواب های صحیح m و n و p برابرم است؟ (رایضه ۹۳)

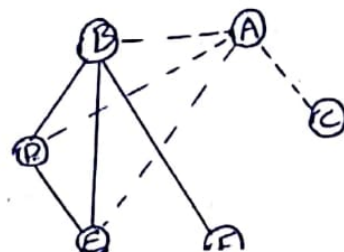
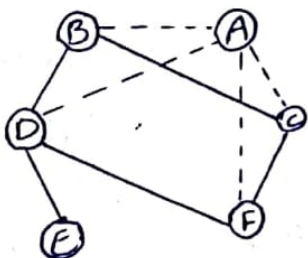
۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

$$p = \frac{3}{2}m \rightarrow 2p = 3m = 18 \rightarrow p = 6$$

این براف ۲ رأس دارد. یعنی $p=6$ یعنی $m=4$ و $n=2$. از آنجا که $p=6$ پس بیشترین درجه ممکن $\Delta=5$ خواهد بود. اگر $\Delta=5$ از بین ۴ رأس ها (که همگی از سر رأس a درجه a یا b یا c است، فرض می کنیم c باشد) بر وجه رأس های دیگر a و b و c وجود دارد. پس شرط هم بند بودن وجود دارد، اکنون اگر این رأس را با رأس های متصل بدان کنار برابرم براف جدیدی با ۵ رأس و ۶ یال داریم که درجه رأس های آن باید به صورت زیر باشد:

$$a-1, b-1, c-2, d-2, e-2$$

دو حالت میسر می آید:



۱۷۲ - حاصل عبارت $(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ کدام است؟ (رایه منفی ۹۳)

۱) $\sqrt{3}$ ۲) ۲ ۳) $1+\sqrt{3}$ ۴) $\sqrt{3}$

آبر عبارت را مقرر کنیم:

$$x = (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \rightarrow x^3 = [(\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^2 + 2\sqrt{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}] \cdot \sqrt[3]{(2\sqrt{2})^3}$$

$$= [((2-\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3}) + 2\sqrt{4-3})] \sqrt[3]{8} = 2 \times 2 = 4 \rightarrow x = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2}$$

۱۷۳ - حاصل عددهای ۱۱، ۹، ۷، و واحد کدام است؟ (رایه منفی ۹۳)

۱) $15\sqrt{2}$ ۲) $14\sqrt{3}$ ۳) $12\sqrt{5}$ ۴) $14\sqrt{8}$

قضیه هرون:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{18}{2} = 9 \rightarrow S = \sqrt{9(9-7)(9-9)(9-12)} = \sqrt{9(2)(0)(-3)} = \sqrt{9 \times 12 \times 0} = 12\sqrt{8}$$

۱۷۴ - حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^2 + t^3 + 1}$ برای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ کدام است؟ (رایه منفی ۹۳)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

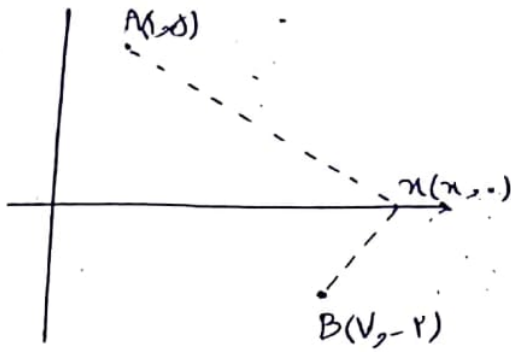
$$\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^2 + t^3 + 1} = \frac{\frac{t^{12} - 1}{t - 1}}{t^2(t^3 + 1) + t^3 + 1} = \frac{t^{12} - 1}{(t-1)(t^3+1)(t^2+1)} = \frac{t^2 - 1}{(t-1)(t^3+1)}$$

$$\frac{t^2 - 1}{t - 1} = t^2 + t + 1 = (t + \frac{1}{t})^2 + \frac{t}{2} = (\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})^2 + \frac{t}{2} = (\frac{\sqrt{5}}{2})^2 + \frac{t}{2} = \frac{5}{4} + \frac{t}{2} = 2$$

۱۷۵ - مساحت مربع با ابعاد طولی روی محور مختصات است که رئوس آن از دستگاه مختصات $A(1,0)$ و $B(2,-2)$ است. بیشترین مساحت را داشته باشد؟ (رایه منفی ۹۳)

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۱

فاصله بین دو نقطه $|x_A| - |x_B|$ را میزنیم باشد:



$$S = |x_A| - |x_B| = \sqrt{(x-0)^2 + (0-0)^2} - \sqrt{(x-7)^2 + (0-2)^2} = \frac{x-1=t}{}$$

$$S = \sqrt{t^2 + 18} - \sqrt{(t-7)^2 + 4} \rightarrow S'_t = 0$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 + 18}} - \frac{-(t-7)}{\sqrt{(t-7)^2 + 4}} = 0 \rightarrow \frac{t}{\sqrt{t^2 + 18}} = \frac{-(t-7)}{\sqrt{(t-7)^2 + 4}}$$

$$\frac{t^2}{t^2 + 18} = \frac{(t-7)^2}{(t-7)^2 + 4} \rightarrow t^2(t-7) + 4t^2 = t^2(t-7)^2 + 18(t-7)^2$$

$$4t^2 - 18(t-7)^2 = 0 \rightarrow (2t - 9)(t-7) = 0 \rightarrow$$

$$t = 1.5 \rightarrow x = 11 \checkmark$$

$$(-3t + 9)(7t - 9) = 0$$

$$t = \frac{9}{7} \rightarrow x = \frac{30}{7}$$

۱۷۶- سه صفحه معادله‌های ماتریسی زیر داده شده است. وضعیت فصل مشترک دو به دو صفحات نسبت به هم چگونه است؟ (۴ نمره)

است؟ (۴ نمره)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -11 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۱) معادله هم
۲) معادله هم
۳) معادله هم

ابتدا در مثال (۱) ضرایب را مساوی کنیم

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -11 & 0 \end{vmatrix} = 2(10-11) - 1(-1-0) + 1(-11-3) = 2 - 1 - 14 = -13 \neq 0$$

وقتی در میان کناریها ضرب باشد یعنی در کنار جواب مختصر به مزد نماند. هم چنین دو منفی ای با هم فواری نیستند پس دو حالت طری وجود دارد:

۱) هر منفی به صورت مثبت معطوع اند و در این صورت فعلی در کنارها سه خط دو به دو با هم فواری هستند به جمع فواری نماند.
 $\Delta = 0 \neq \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

۲) هر سه منفی در یک خط با هم معطوع اند و در این صورت به هم جواب فواری دارند:

$$\Delta = 0 = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -11 & 5 \end{vmatrix} = 7(15-11) - 1(-2-10) + 1(-22-6) = 28 + 12 - 28 = 12 \neq 0 \rightarrow \text{فواری}$$

۱۷۷- آیا رابطه $ad = bc$ در $(a, b) R (c, d)$ روی مجموعه R^2 هم از این است. در صورت هم از این

نقطه $(1, 2)$ از تمام نقطه میگذرد P (برای 9^3)

۱۱ هم از این نیست $(1, 2)$ $(1, 3)$ $(2, 3)$ $(2, 4)$

این رابطه هم از این نیست زیرا خاصیت نقری را ندارد:

$$\begin{cases} (1, 2) R (0, 0) \\ (0, 0) R (0, -3) \end{cases} \rightarrow (1, 2) R (0, -3)$$

۱۷۸- هفت عدد در جدولش $abcabc$ مربع کامل است. بین abc و abc ارقام عدد abc برابر است. (9^3)

$$n = \sqrt{abcabc} = \sqrt{abc(abc)} = \sqrt{abc} \times \sqrt{abc} =$$

$$\sqrt{11} \times \sqrt{13} \times \sqrt{abc} = k^2$$

$$\sqrt{abc} = 11 \times 13 \times q^2 = 143q^2$$

$$q^2 = 1 \rightarrow abc = 143 \rightarrow a+b+c = 14$$

→ برای abc مربع کامل عدد abc

$$q^2 = 4 \rightarrow abc = 143 \times 4 = 572 \rightarrow a+b+c = 14 \checkmark$$

۱۷۹ - دو رقمی عدد طبیعی $N = \overline{abc}$ باقی‌مانده صورت $(a \cdot bc)$ نوشته شده است. بیشترین مقدر N از مربع کامل صد واحد کمتر است؟ (ریاضی ۹۳)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

⊙ a و c رقم عدد N هستند. پس باید از آن بکسر باشد. البته باید $a \neq 0$ زیرا رقم اول است.

$$2 \times \overline{abc} = (a \cdot bc) \rightarrow 2 \times (c + 10b + 100a) = c + 2b + 2^2 \times 0 + 2^3 \times a \rightarrow$$

$$2c + 20b + 200a = c + 2b + 2a \rightarrow c = 12a - 14b \rightarrow c = 2(8a - 7b) \rightarrow$$

$$\begin{cases} c = 2 = 2 \times (8 \times 1 - 7 \times 1) \\ c = 2 = 2 \times (8 \times 2 - 7 \times 2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1, b = 1, c = 2 \\ a = 2, b = 2, c = 2 \end{cases} \checkmark$$

تزیین ترین مربع کامل ۲۲۵ است که از N ، ۱ واحد بیشتر است: $\rightarrow N = 225 \rightarrow$

۱۸۰ - به ازای چند عدد طبیعی دور هم n دو عدد به صورت $5n-2$ و $7n+3$ نسبت به هم غیر اولند؟ (ریاضی ۹۳)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

آگر $b, m, 3$ دو عدد را d مقسوم:

$$\begin{cases} d | (5n-2) \\ d | (7n+3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d | 5 \times (5n-2) \\ d | 7 \times (7n+3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d | (25n-10) \\ d | (49n+21) \end{cases} \rightarrow d | (25n+10) - (25n-10) = 24$$

$$\begin{cases} d = 1 \\ d = 24 \end{cases} \rightarrow d = 24$$

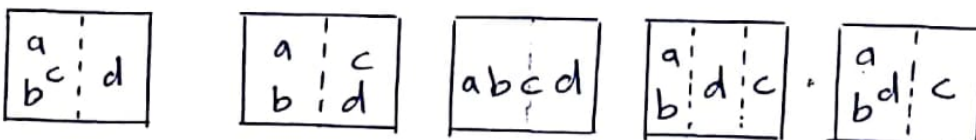
$$\begin{cases} 24 | (5n-2) \\ 24 | (7n+3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24 | 3 \times (5n-2) = 15n-2 \\ 24 | 2 \times (7n+3) = 14n+6 \end{cases} \rightarrow 24 | (n-12) \rightarrow n-12 = 24k \rightarrow$$

$$n = 24k + 12 = 12 \times 2k + 12 = 12 \times (2k + 1) = 12 \times m, m \in \mathbb{N}$$

۱۸۱ - تعداد رابطه‌های هم‌ارزی روی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ که شامل (a, b) باشد کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

پس در واقع باید تعداد آنرا بشماریم
و اینها هستند که در آن a, b
همیشه هم‌ارز باشند.



۱۸۲- تعداد سرآب های مرتب با فنس های مسطح و غیر مستقیم به صورتی که مجموع حوسه فنس برابر ۱۰ و هر فنس کمتر از ۲ باشد کدام است؟ (ارایسه ۹۳)

۲۱ ۴

۲۰ ۳

۱۸ ۲

۱۷ ۱

باید تعداد جواب های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ را به طوری که $x_1 \geq 2$ باشد بدست آوریم. اگر A_1 مجموع جواب ها باشد که $x_1 \geq 2$ در این صورت:

$$y_1 = x_1 - 2, y_1 \geq 0 \rightarrow y_1 + 2 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow y_1 + x_2 + x_3 = 8$$

تعداد جواب های مسطح است: $\binom{8+3-1}{3-1} = \binom{10}{2}$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 10$$

مقادیر $|A_1 \cap A_2|, |A_1 \cap A_3|, |A_2 \cap A_3|$ و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$ را می توانیم به روشی دیگر اشتراک بردن از امکان تعداد هم زمان دو یا از آن ها بزرگتر یا مساوی ۲ بدست آوریم. $|A_1 \cap A_2| = |A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_3| = 10$ و $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 10$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{10+3-1}{3-1} = \binom{12}{2} = 66 - 45 = 21$$

۱۸۳- از نقطه $A(0, \alpha)$ دو خط موازی عمود بر هم بر منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ رسم شده است. α کدام است؟ (رایسه ۹۰)

۵ ۴

۲ ۳

۹ ۲

۳ ۱

معادله خط مماس بر منحنی از نقطه $A(0, \alpha)$ به سبب عمود بودن m به صورت $y = mx + \alpha$ است. حال معادله مماسی این خط با منحنی را تشکیل داده و شرط موازی بودن را اعمال می کنیم:

$$mx + \alpha = \frac{x^2}{2} + 3 \rightarrow \frac{x^2}{2} - mx + 3 - \alpha = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow m^2 + 2\alpha - 6 = 0$$

چون دو خط بر هم عمود هستند داریم:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \frac{c}{a} = -1 \rightarrow 2\alpha - 6 = -1 \rightarrow \alpha = \frac{5}{2}$$

۱۸۴- مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - 5^k}{10^k}$ کدام است؟ (رایسه ۹۰)

۲ ۴

۱ ۳

۱ ۲

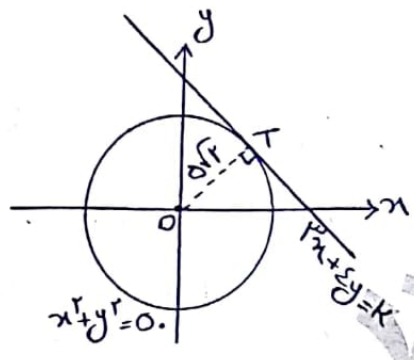
۲ ۱

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Lambda - 0^{k+1}}{1 \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{1}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} 0 \times \left(\frac{0}{1}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Lambda}{0}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} 0 \left(\frac{1}{1}\right)^k =$$

$$\frac{\frac{\Lambda}{0}}{1 - \frac{\Lambda}{0}} - \frac{0 \times \left(\frac{1}{1}\right)}{1 - \frac{1}{1}} = \Lambda - 0 = -1$$

۱۸۵- اگر Λ و γ دو ضلع قائم الزامی به طول وتر $\sqrt{2}$ باشند بیشترین مقدار $\gamma + \Lambda$ کدام است؟ (پایانه ۹۰)

۱) $2\sqrt{2}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) 3 ۴) 2



بر اساس شکل متابین باید نامعلومی صدقه از ضلع $k = 3x + 4y$ یعنی OT باشد.
 فاصله مرکز دایره تا خط $OT = \sqrt{2}$ از طرفی نامعلومی صدقه از ضلع $k = 3x + 4y$ است.
 $OT = \frac{|3(0) + 4(0) - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k|}{5}$ $OT = \sqrt{2}$ $|k| = 2\sqrt{2}$

۱۸۶- رابطه R در مجموعه R اعداد صحیح و دو به صورت $\Lambda |x^2 - y^2| \rightarrow xRy$ تعریف شده است. آیا این رابطه هم ارزی است؟ در صورت هم ارزی بودن مقادیر Λ های هم ارزی کدام است؟ (پایانه ۹۰)

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 2 ۳) به شمار ۴) هم ارزی نیست

برای بررسی هم ارزی بودن رابطه R باید خصوصیات Λ را بررسی کرد.

برای $\Lambda = 1$: $xRy \rightarrow \Lambda |x^2 - y^2| \rightarrow \Lambda \cdot 0$ بازتابه

تقارن: $xRy \rightarrow yRx$
 $\Lambda |x^2 - y^2| \rightarrow \Lambda |y^2 - x^2|$

$xRy \rightarrow \Lambda |x^2 - y^2| \rightarrow x^2 - y^2 = \Lambda K \xrightarrow{\times (-1)} y^2 - x^2 = -\Lambda K \rightarrow y^2 - x^2 = \Lambda(-K)$

$\rightarrow y^2 - x^2 = \Lambda K' \rightarrow \Lambda |y^2 - x^2| \rightarrow yRx$

تعدی: xRy, yRz, xRz
 $\Lambda |x^2 - y^2|, \Lambda |y^2 - z^2|, \Lambda |x^2 - z^2|$

$$\begin{cases} xRy \rightarrow \lambda |x^2 - y^2 \rightarrow x^2 - y^2 = \lambda K \\ yRz \rightarrow \lambda |y^2 - z^2 \rightarrow y^2 - z^2 = \lambda K' \end{cases}$$

$$+ \frac{x^2 - y^2 + y^2 - z^2}{K''} = \lambda(K + K') \rightarrow x^2 - z^2 = \lambda K'' \rightarrow \lambda |x^2 - z^2 \rightarrow x^2 - z^2 = \lambda K''$$

سین رابطه‌ی R یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و از آنجایی که تمام اعداد صحیح فرد در رابطه‌ی $\lambda |x^2 - y^2$ صدق می‌کنند، می‌توانیم در رابطه‌ی اساس هم‌ارزی [A] قرار می‌دهیم.

۱۸۷- یک عدد طبیعی فرد و مربع کامل با بیشترین مقادیر ممکن به صورت $(abc)_8$ نوشته می‌شود. $a+c$ کدام است؟ (رایضه ۹۰)

۱۰، ۱۱ ۸، ۱۲ ۹، ۱۳ ۷، ۱۴

بزرگترین عدد صحیح فرد در فضای ۸ عدد $1-8$ و بزرگترین عدد دورقمی در فضای ۸ عدد $1-8$ و هم‌صفت بزرگترین عدد سرچشمه در فضای ۸ عدد $1-8$ یعنی ۵۱۱ است. بزرگترین عدد فرد مربع کامل و کوچکتر از ۵۱۲ عدد $1-8$ است. حال این عدد به فضای ۸ به صورت $(761)_8$ است.

۴۴۱	۸	۵۵	۸
۴۰	۷	۴۷	۷
۴۱	۷	۷	۷
۴۰	۷	۷	۷
۱	۷	۷	۷

$(271)_8 \rightarrow a+c=7$
 $\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{matrix}$

۱۸۸- عدد $(75)!$ مجموع به چه صفت است؟ (رایضه ۹۰)

۱۸، ۱۱ ۱۲، ۱۲ ۱۷، ۱۳ ۱۵، ۱۴

$$5^\alpha | (75)! \rightarrow \alpha = \left[\frac{75}{5} \right] + \left[\frac{75}{5^2} \right] + \left[\frac{75}{5^3} \right] + \dots \rightarrow \alpha = 15 + 3 = 18$$

۱۸۹- اگر $357x + 229y = (357, 229)$ آن‌گاه کوچکترین عدد صفت $x+y$ کدام است؟ (رایضه ۹۰)

۱۳، ۱۱ ۱۲، ۱۲ ۱۲، ۱۳ ۱۰، ۱۴

$$(229, 357) = (272, 185) = (187, 185) = (17, 185) = 17 \rightarrow 357x + 229y = 17 \rightarrow 21x + 17y = 1$$

در ادامه معادله‌ی سیلری مرتب را به معادله‌ی هم‌صفت تبدیل می‌کنیم.

$$37y \equiv 1 \pmod{21} \rightarrow -5y \equiv 1 \pmod{21} \rightarrow 5y \equiv 20 \pmod{21} \rightarrow y \equiv 4 \pmod{21} \rightarrow y = 21k + 4$$

$$\rightarrow 21m + 37(21k + 4) = 1 \rightarrow m = -37k - 7$$

با توجه به مطالب فوق جدول زیر را تشکیل دهید:

k	0	+1	-1
m	-7	-44	30
y	4	28	-17
m+y	-3	-19	13

فوق

۱۹۰. تعداد اعداد طبیعی دور همی که نسبت به ۱۰۵ اول باشند کدام است؟ (رایانه ۹۱)

۳۹، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴

۱۰۵) ϕ تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۵ است که نسبت به ۱۰۵ اولند، پس:

$$105 = 3 \times 5 \times 7 \rightarrow \phi(105) = 105 \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 24 \times 4 \times 6 = 48$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 105, (n, 105) = 1\} \rightarrow n(A) = 48$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} : 1 < n < 9\} \rightarrow n(B) = 8$$

پس تعداد اعداد دور همی که نسبت به ۱۰۵ اولند برابر است با:

$$48 - 8 = 40$$

۱۹۱. اگر n یک عدد طبیعی باشد و $(1 + \sqrt{2})^n = 99 + b\sqrt{2}$ که b یک عدد صحیح است، در صورت

تعیین کنید عدد a کدام است؟ (رایانه ۹۱)

۷۴، ۷۲، ۷۰، ۷۳

حل: $(1 + \sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}$ پس با توجه به تساوی داده شده خواهیم داشت:

$$(1 + \sqrt{2})^n = 99 + b\sqrt{2} \rightarrow ((1 + \sqrt{2})^2)^n = 99 + b\sqrt{2} \rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^n = 99 + b\sqrt{2}$$

از تساوی $(3 + 2\sqrt{2})^n = 99 + b\sqrt{2}$ نتیجه می‌شود که: $(3 - 2\sqrt{2})^n = 99 - b\sqrt{2}$ زیرا در جمله‌های \odot و $\odot\odot$

عبارت فرد کامل بیان هستند و عبارت زوج مرتبه می‌گردد پس نتیجه تساوی درست است.

۱۱۰. $(5 - \sqrt{2})^n$ کاهنده است، پس عبارت‌های \odot و $\odot\odot$ را در هم می‌زنیم:

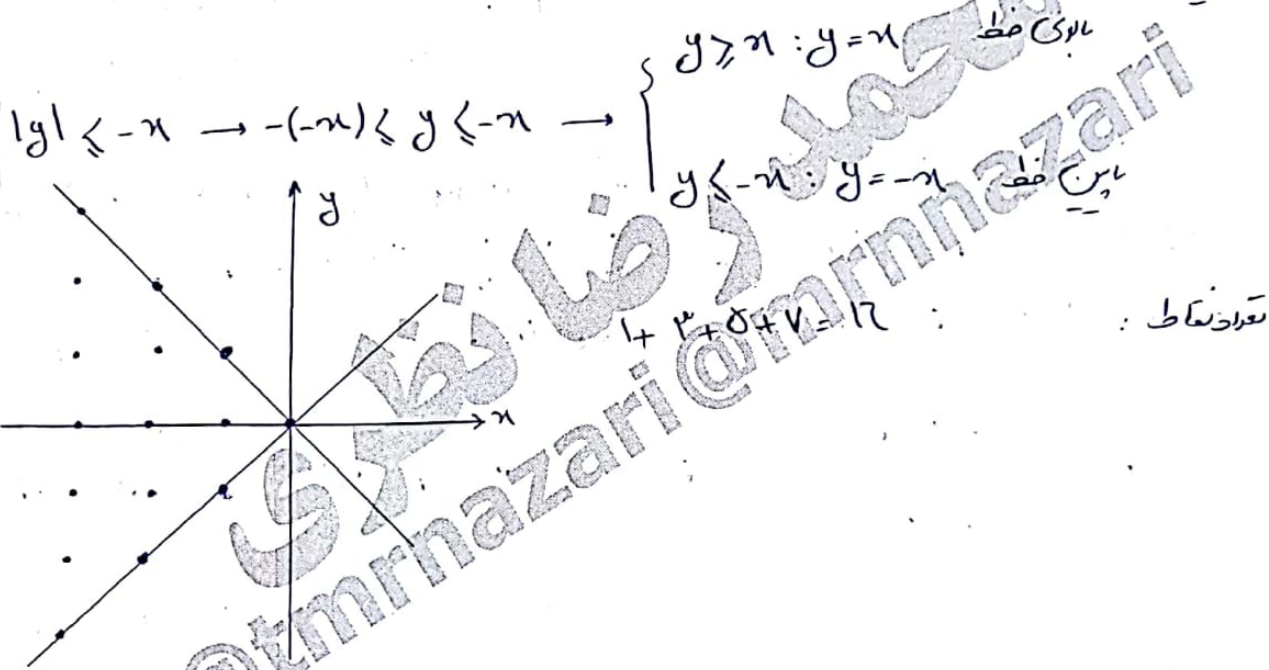
$$\begin{cases} (3+2\sqrt{2})^n = 99 + b\sqrt{2} \\ (3-2\sqrt{2})^n = 99 - b\sqrt{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرب}} (9-8)^n = (99)^2 - 2b^2$$

$$\rightarrow 1 = 9801 - 2b^2 \rightarrow 2b^2 = 9800 \rightarrow b^2 = 4900 \rightarrow b = 70$$

۱۹۲- تعداد رابطه‌ی $\{z \in \mathbb{Z}^2 : |x| \leq n, |y| \leq n\}$ از چند نقطه تشکیل شده است؟ (ریاضی ۱)

۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸

باید بشناسیم که نامعادله‌ی $|x| \leq n$ چه نخبه از دستگاه معادلات را در بر می‌گیرد:



۱۹۳- کدام عدد کسری همگام (هر عدد صحیحی را می‌توان به صورت مجموع چند عدد متوالی نوشت)، را نقض می‌کنند؟ (ریاضی ۲)

۵۷، ۶۲، ۷۲، ۷۴

۱۹۴- عدالت چند زوج مرتب به صورت (a, b) با نقض های اعداد صحیح و مثبت انتخاب کنیم، تا مقصود باشیم در جویز زوج انتخابی جمع مقصود های اول و جمع مقصود های دوم اعداد زوج هستند؟ (ریاضی ۹۲)

۳، ۴، ۵، ۶

آوردن زوج به زوج (زوج، زوج)، (زوج، فرد)، (فرد، فرد)، (فرد، زوج) داشته باشیم جمع زوج‌ها این خاصیت را دارند و پس با افتادن شدن یک زوج به معلولت کسول می‌دهیم. بنابراین عدالت ۵ زوج مرتب نیاز است.

۱۹۵- اگر $A_i = [-i, \frac{9-i}{2}]$ و $i \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ و $(A_i \cap A_j) - (A_i \cap A_k)$ مجموعاً
 کدام است؟ (رایضی ۹۲)

- ۱۱ $(1, 2) \cup (1, -2)$ ۱۲ $(1, 2) \cup (-1, 2)$ ۱۳ $(1, -1)$ ۱۴ \emptyset

$A_1 = [-1, 2], A_2 = [-2, 3], A_3 = [-3, 4], A_4 = [-4, 5]$;
 $A_2 \cap A_3 = [-2, 3], A_1 \cap A_4 = [-1, 4] \rightarrow (A_2 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) = [-2, -1) \cup (1, 4]$

۱۹۶- اگر $A = \{k \in \mathbb{Z} : 1 < k < 5\}$ و $B = \{k \in \mathbb{Z} : 1 < k < 4\}$ و $A \cap B$ چند عضو دارد؟ (رایضی ۹۲)

- ۱۱ ۲ ۱۲ ۸ ۱۳ ۹ ۱۴ ۱۷

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}, |(A \times B) \cap (B \times A)| = |A \cap B|^2 = 5^2 = 25$

۱۹۷- به ازای چند عدد طبیعی کوچکتر از ۵۰، عدد $7^n + 43$ بر ۴۳ بخش پذیر است؟ (رایضی ۹۲)

- ۱۱ ۷ ۱۲ ۷ ۱۳ ۸ ۱۴ ۹

$$7^n + 43 \equiv 0 \pmod{43} \rightarrow 7^n \equiv -43 \pmod{43} \rightarrow 7^n \equiv 1 \pmod{43}; \quad 7^2 \equiv 7, \quad 7^3 \equiv -1, \quad 7^4 \equiv -7, \quad 7^5 \equiv -7$$

$$\rightarrow 7^6 \equiv 1, \dots$$

و این یعنی به ازای ۸ عدد $7^n + 43$ بر ۴۳ بخش پذیر است. $n = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$

۱۹۸- مساحت مثلثی با دو ضلع ۱۲ و ۹ واحد برابر $24\sqrt{5}$ واحد مربع است. بزرگترین ضلع این مثلث کدام است؟ (رایضی ۹۲)

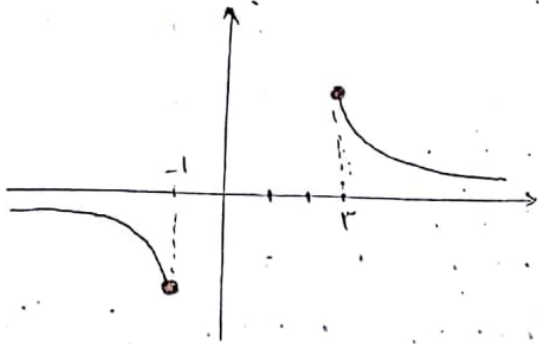
- ۱۱ ۲۱ ۱۲ ۲۲ ۱۳ ۲۳ ۱۴ ۲۴

چون بزرگترین ضلع را هر دو واحد دیگر زاویه قائمه و کسینوس را مستقیماً در نظر می‌گیریم.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha \rightarrow 24\sqrt{5} = \frac{1}{2} (9)(12) \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha} \cos \alpha = \pm \frac{2}{3}$$

$$c^2 = 12^2 + 9^2 - 2(12)(9)\left(-\frac{2}{3}\right) \rightarrow c = 23$$

۱۹۹- شکل بر روی نمودار $y = \sin^{-1}(U(x))$ تابع است. تابعی $U(x)$ به دوام صورت است. (برای نمره ۹۴)



$$\frac{2}{1-x} \quad (1)$$

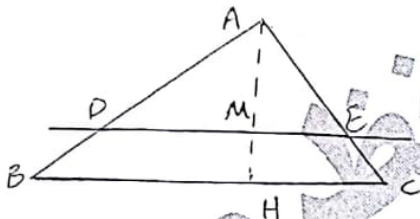
$$\frac{2}{x-1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2-x} \quad (2)$$

$$\frac{1}{x-2} \quad (2)$$

طبق شکل تابع $y = \sin^{-1}(U(x))$ و $U(x)$ هر دو باید $U(x)$ در $[-1, 1]$ باشد. در نتیجه نمره های اولی حدت مه شوند. اگر در نمره ۳ عدد ۱ را قرار دهیم نمودار $y = \sin^{-1}(U(x))$ را می بینیم که در حالتی که در نمودار نقطه ای اتقوف نکرده است. پس نمره ۱ صحیح است.

۲۰۰- در مثلث ABC مساحت 20 و $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط DE موازی BC است. مساحت ADE از واحد در DE برابر 9 شود. مساحت ADE در DE برابر 9 واحد است. (برای نمره ۹۴)



$$0.9 \quad (1)$$

$$0.81 \quad (1)$$

$$1.2 \quad (2)$$

$$1 \quad (2)$$

$$\frac{AM}{AH} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{(AM)}{12} = \frac{(DE)}{20} \rightarrow \frac{0.8}{3} = \frac{(DE)}{5}$$

از رابطه های آلس $MS = MS$

$$\rightarrow (DE) = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{(DE+BC)}{2} \times MH = (1 + \frac{DE}{2}) \times MH \rightarrow S = \frac{(DE)}{2} \times MH + (MH) \times \frac{DE}{2}$$

$$\rightarrow S = (-\frac{1}{2})(9) + \frac{2}{10}(1 + \frac{0}{2}) = 1$$

۲۰۱- رابطه $\{x \mid x \geq 1\}$ و $\{x \mid x < 3\}$ بر روی محور $A = \{x \mid |x| < 3\}$ تصویر شده است. تعداد بخش های این رابطه A بخش های صحیح A است. (برای نمره ۹۴)

$$20 \quad (1)$$

$$16 \quad (2)$$

$$15 \quad (3)$$

$$12 \quad (4)$$

$$R = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3)\}$$

۲۰۲ - چند عدد سرزمن وجود دارد که مضرب ۱۱ بوده و باقیمانده‌ی تقسیم آن بر دو عدد ۵ و ۳ برابر ۱ باشد؟ (رایضه ۹۴)

۳ ۱۱ ۲ ۱۲ ۵ (۳) ۶ (۴)

$$x \equiv 0 \pmod{11} \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \\ x \equiv 1 \pmod{5} \end{cases} \rightarrow x \equiv 1 \pmod{10}; \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{2} \xrightarrow{+110} x \equiv 121 \pmod{220} \\ x \equiv 0 \pmod{11} \xrightarrow{+121} x \equiv 121 \pmod{220} \end{cases} \rightarrow x \equiv 121 \pmod{220} \rightarrow x = 121, 341, 561, \dots$$

$k=2$

$$\overline{abc} = 11 \times 13 \times 2^2 = 572 \rightarrow 5+7+2 = 14$$

۲۰۳ - مجموع دو عدد ۲۷۷۱ و ۲۳۱ در کلاس ۱۹۴، متوسل علیه مشترک آن جا ۲۳۱ و مخالف عدد کوچکتر است. تقاضای این دو عدد کدام است؟ (رایضه ۹۴)

۲۳۱ (۱) ۲۷۲ (۲) ۲۹۳ (۳) ۹۱۴ (۴)

$$a+b = 2772 \rightarrow a'd + b'd = 2772 \quad \frac{d=231}{(a',b')=1} \rightarrow a'+b' = 12 \rightarrow \begin{cases} a' = 7 \\ b' = 5 \end{cases}$$

$$a-b = a'd - b'd = (7-5) \times 231 = 462$$

۲۰۴ - اگر عدد $2n^2 - n - 2$ مضرب ۵۳ باشد، رقم میان بزرگترین عدد سه رقمی کدام است؟ (رایضه ۹۴)

۲ ۱۱ ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

تقریبی این عدد به شکل $2n^2 - n - 2 = (2n+3)(n-2) = 53k$ است که چون ۵۳ عددی اول است پس یکی از $2n+3$ یا $n-2$ برابر مضرب ۵۳ قرار دهیم. پس داریم:

$$(n-2) = 53q \xrightarrow{q=18} n-2 = 954 \rightarrow n = 956$$

$$2n+3 = 53q \xrightarrow{q=37} 2n+3 = 1921 \rightarrow n = 959$$

۲۰۵ - شکل زیر نشان می‌دهد که R است. ماتریس مسافرت R چند درجه است؟ (رایضه ۹۴)



۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

$$M(R \circ R) = [M(R)]^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۲۰۶ - تعداد جواب های صحیح و غیر منفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟ (رایحه ۹۴)

۳۰، ۱۱ ۲۲، ۱۲ ۳۳، ۱۳ ۳۵، ۱۴

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y = 4 \rightarrow \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$$

۲۰۷ - اگر $\alpha = \sqrt{2\sqrt{2}-4}$ و $\beta = \sqrt{3\sqrt{2}+4}$ باشند حاصل عبارت $(\alpha^r + \beta^r - \alpha\beta)(\alpha^r + \beta^r + \alpha\beta)$ کدام است؟ (رایحه ۹۵)

۲، ۱۲ ۱، ۱۲ ۲\sqrt{2}، ۱۴ ۲\sqrt{2}، ۱۳

از اتحاد مزدوج استفاده کنیم:

$$(\alpha^r + \beta^r + \alpha\beta)(\alpha^r + \beta^r - \alpha\beta) = (\alpha^r + \beta^r)^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha^{2r} + \beta^{2r} + \alpha^r\beta^r = 2$$

$$= 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - 4 + (\sqrt{2}\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

۲۰۸ - اگر عبارت $ax^3 + 5x^2 - 14x + 10 - a$ بر سه عبارتی $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر باشد، a کدام است؟ (رایحه ۹۵)

۱، ۱۱ ۲، ۱۲ ۳، ۱۳ ۴، ۱۴

$$P(x) = ax^3 + 5x^2 - 14x + 10 - a$$

مبنی $x=1$ ریشهی مشترک $P(x)$ بنویسیم:

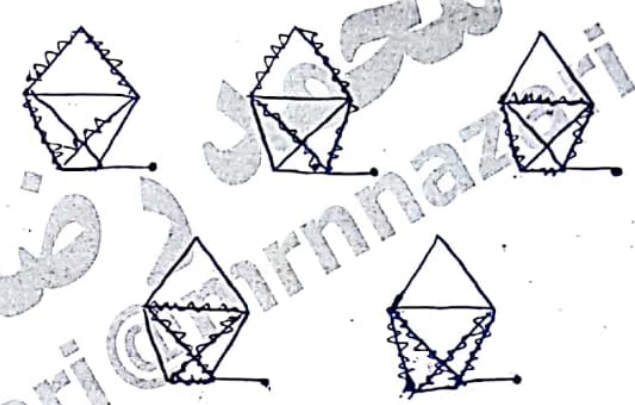
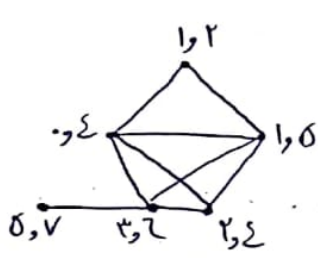
$$P(1) = 3a + 11 - 14 = 0 \rightarrow a = 2$$

۲۰۹ - حاصل $(155^3) - (5^3)$ در بنی ۴ کدام است؟ (رایحه ۹۵)

- ۱۱، (۳۱۴۵) ۱۲، (۳۳۴۵) ۱۳، (۳۴۱۵) ۱۴، (۳۴۵۳)

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & 3 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}$$

۲۱۰- در آن بازه های (۲۱۱)، (۲۱۲)، (۲۱۳)، (۲۱۴)، (۲۱۵)، (۲۱۶)، (۲۱۷)، (۲۱۸)، (۲۱۹) از اعداد صحیح چند دور یا طولی می دارد؟
 (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶ (۶) ۷ (۷) ۸ (۸) ۹ (۹) ۱۰



۲۱۱- با میانگین یک تقسیم عدد طبیعی N عدد 11 برابر 12 می باشد. (یعنی) عدد را بر 11 تقسیم کنیم با میانگین 12 خارج قسمت می شود. رقم یکان عدد بزرگتر N کدام است؟ (ریاضی ۹۰)
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۷ (۵) ۸

طبیعی ترین داریم $N \equiv 22 \pmod{31}$ و هم چنین $N = 439 + 9$ و $N < 439$ ، حاصلی $N = 449$ در اینجا هم همین داریم:

$$449 \equiv 2 \pmod{31} \rightarrow 449 \equiv 13 \pmod{31} \equiv 44 \pmod{31} \rightarrow 2 \pmod{31}$$

پس ترین عدد 11 می توان کرد و در آخر 12 است و 11 بین 11 و 12 عدد 11 است N بصورت زیر است:

$$N = 44 \times 33 = 1452$$

۲۱۲- اگر $(357, 211) = 211m + 357n$ باشد. تعداد اعداد صحیح دو طرفه m کدام است؟ (ریاضی ۹۰)
 (۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

از اینج ب. م. م. دو عدد ۲۲۱ و ۲۵۷ بر روی ۱۷ امت معادله به صورت $13x + 21y = 1$ داده شده و جواب های آن به صورت کتبی زیر است:

از من نامعادله $13 + 21k \leq 99$ معادله $10 < 13 + 21k$ معادله 3 و 2 دارد k بدست می آید که 0 معادله طبیعی دورن n بدست می آید.

$$x = 13 + 21k$$

$$y = -1 - 13k$$

۲۱۳ - در جواب جهت دار زیر با رسم همان هندسه جدید بر روی یک رابطه با خواص برآینده و پارامتر حاصل می شود؟ (برای نمره ۹۵)



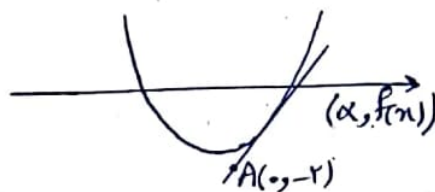
از ایند (e و c) و (c و b) در جواب داده شده است که در نظری بودن باید (e و b) را داشته باشد و از طرفی چون (e و a) و (b و a) را داریم باید (e و b) را داشته باشیم که در این صورت با داشتن دوزوج (e و b) و (e و a) را یکی مورد نظر دیگر پارامتر نیست.

۲۱۴ - از نقطه $A(0, 2)$ دو خط عمود بر یکدیگر رسم شده است. مساحت مثلث با این دو نقطه A و دو نقطه A کمال است؟ (برای نمره ۹۰)

۲(۱) $\frac{5}{4}$ ۳(۳) ۴(۴)

نقطه A کمال و معنی را $x = \alpha$ در نظر بگیریم و معادله $f(x) = x^2 - 1$ رسم شده است. مساحت مثلث با این دو نقطه A و دو نقطه A کمال است؟ (برای نمره ۹۰)

$$x = \alpha = \begin{cases} f(\alpha) = \alpha^2 - 1 \\ f'(\alpha) = 2\alpha \end{cases}$$



→ معادله خط $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

نقطه $A(0, 2)$ روی خط قرار دارد پس در آن صدق می کند.

→ $2 - (\alpha^2 - 1) = 2\alpha(0 - \alpha) \rightarrow -\alpha^2 - 1 = -2\alpha^2 \rightarrow \alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha = \pm 1$



$$S_{AB, C} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$$

۱۱۵- حاصل $\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ کدام است؟ (رایزنه خارج ۹۰)

$\log \frac{2}{3}$ (۲)

$\log \frac{1}{2}$ (۳)

$\log \frac{1}{3}$ (۴)

$\log \frac{1}{2}$ (۱)

سری به سری تکسوی تبدیل می شود

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \log\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \log \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \sum_{k=2}^{\infty} \log \frac{\frac{k-1}{k}}{\frac{k}{k+1}}$$

اینجا $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ را بکار ببریم

$$\sum_{k=2}^{\infty} (\log \frac{k-1}{k} - \log \frac{k}{k+1}) = \log \frac{2-1}{2} - \lim_{k \rightarrow \infty} \log \frac{k}{k+1} = \log \frac{1}{2} - \log 1 = \log \frac{1}{2}$$

۱۱۶- مقدار متوسط تابع $y = |1-x|$ در بازه $x \in [1, 2]$ کدام است؟ (رایزنه خارج ۹۰)

$\frac{2}{3}$ (۲)

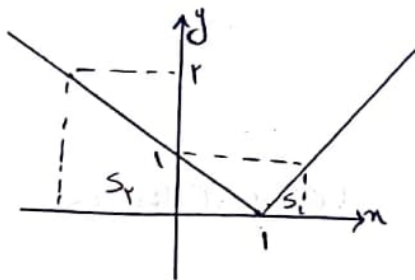
$\frac{1}{2}$ (۴)

$\frac{5}{6}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۱)

مقدار متوسط تابع $y = |1-x|$ در بازه $x \in [1, 2]$ به صورت زیر بدست می آید:

$$f(x) = \frac{\int_{-1}^2 |1-x| dx}{2 - (-1)} \quad (*)$$



بنابراین $\int_{-1}^2 |1-x| dx$ از روش رسم تکمیل می شود:

$$\int_{-1}^2 |1-x| dx = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\rightarrow f(x) = \frac{\frac{5}{2}}{3} = \frac{5}{6}$$

۲۱۷- بیشترین مساحت از زمین را که می توان وسط یک قطب به طول ۸۸ متر در بخش مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است. محصور نمود چند متر مربع است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۹۸۸ (۴)

۹۷۸ (۳)

۹۶۸ (۲)

۹۵۸ (۱)

در طول و عرض زمین را به ترتیب x و y در نظر بگیریم. طول قطب مورد نظر یعنی ۸۸ متر را داریم است:



$$88 = 2y + x \rightarrow x = 88 - 2y$$

$$f(y) = (88 - 2y)y = 88y - 2y^2$$

$$f'(y) = 0 \rightarrow 88 - 4y = 0 \rightarrow y = 22 \rightarrow x = 88 - 2 \times 22 = 44$$

که در این حالت مساحت ایجاب x و y برابر $44 \times 22 = 968$ است.

۲۱۸- مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty} x^{2k-1}$ به ازای $x = \frac{2}{3}$ (ریاضی خارج ۹۱)

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$\frac{7}{6}$ (۲)

$\frac{5}{6}$ (۱)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^1, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \left(\frac{2}{3}\right)^5, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1}$$

این حالت فریب به یک سری هندسی با قدر نسبت $\frac{2}{9}$ با شروع از جمله $\frac{2}{3}$ هستند که با فرمول مجموع

سری با قدر نسبت کمتر از یک یعنی $\frac{a}{1-r}$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2k-1} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{2}{3} \times \frac{9}{7} = \frac{6}{7}$$

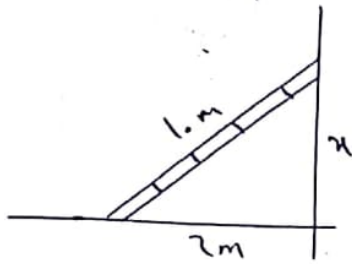
۲۱۹- زردبانی به طول ۵ متر به دوایر یکدیگر دارد. اگر انتهای زردبان با مساحت ۳۰ متر مربع باشد به زمین نزدیک شود و دانه پاشی می توان در فاصله ۲ متر از دوایر است. چند متر کرانه از دانه پاشی شود؟ (ریاضی خارج ۹۱)

$\frac{3}{5}$ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$\frac{5}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)



$$x^2 + 2^2 = 1.0^2 \rightarrow n = 8$$

$$x^2(t) + y^2(t) = 1.0$$

$$2x(t)x'(t) - 2y(t)y'(t) = 0$$

باستفاده از مشتق نسبت به t داریم

$$2 \times 8 \times \frac{1}{3} + 2 \times 2 \times y'(t) = 0 \rightarrow y'(t) = \frac{2}{3}$$

۲۲۰- تابع f یا فضا خطی $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{برای } x \text{ و } 2 \\ 3 & \text{برای } x \text{ و } 3 \end{cases}$ معرّفی است. حاصل $U_n(f) - L_n(f)$ در بازه $[0, 1]$ برای $n=10$ به هم است. (برای $n=10$ خارج از (۹۱))

در ابتدا به صورت جداگانه $U_n(f)$ و $L_n(f)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$U_{10}(f) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} \times 2 = 2, \quad L_{10}(f) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{10} \times (-2) = -2$$

$$U_{10}(f) - L_{10}(f) = 2 - (-2) = 4$$

۲۲۱- در عبارات نامادی $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2}$ ($n \geq 3$) با یک استقرای تعمیم یافته

از تمام نامادی برکس استناد شده است. (برای $n=3$ خارج از (۹۱))

$$2^k > k \quad (1) \quad 2^{k+1} > 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k > k+1 \quad (2) \quad 2^{k+1} > 3 \quad (3) \quad 2^k > k-1 \quad (4)$$

باید از درست بودن $P(k)$ در نتیجه $P(k+1)$ نتیجه بگیریم. در اینجا داریم:

$$P(k): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^k - 1} < \frac{k}{2}$$

$$P(k+1): 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^{k+1} - 1} < \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{1}{2^{k+1}-1} + \frac{1}{2^k-1} + \frac{1}{2^{k-1}-1} + \dots + \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^1-1} < \frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}-1}$$

$$\frac{k}{2} + \frac{1}{2^{k+1}-1} < \frac{k+1}{2}$$

و بنابراین آنرا ثابت کنیم:

کدام ثابت می شود اما که ی ثابت نامساوی بالا بر همان روش:

$$\frac{1}{2^k-1} < \frac{k+1}{2} - \frac{k}{2} \rightarrow \frac{1}{2^{k+1}-1} < \frac{1}{2} \rightarrow 2^{k+1}-1 > 2$$

$$2^{k+1} > 3$$

۲۲۲- اگر $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مربعی $|A|$ و $|B|$

برابر می باشد یا نه؟ و اگر نه، در صورت کجای آن تفاوت است؟ این تفاوت چگونه است؟ (راه حل خارج آری)

ع. صمیمی

۲۳ درجه

۲۴ صمیمی

۱ کامل

همچنین می توانیم از این رابطه در نقطه اول برآورد تقریبی به دست آوریم. آن روش است.

۲۲۳- چند عضو از مجموعه $\{0, 1, \dots, 15\} \in \mathbb{N}$ که در 7 تقسیم پذیرند؟ (راه حل خارج آری)

۲۷۴ ع

۲۷۳ (۲)

۲۷۲ (۲)

۲۷۱ (۱)

$$\text{کل مورد حساب: } 299 - 101 + 1 = 200$$

$$A: \left[\frac{299}{7} \right] - \left[\frac{100}{7} \right] = 42 - 14 = 28$$

$$B: \left[\frac{299}{11} \right] - \left[\frac{100}{11} \right] = 27 - 9 = 18$$

$$\rightarrow A \cap B: \left[\frac{299}{77} \right] - \left[\frac{100}{77} \right] = 3 - 1 = 2$$

$$|A \cup B| = 28 + 18 - 2 = 44 \rightarrow |A \cap B| = 200 - 44 = 156$$

۲۲۵- چند عدد طبیعی a کوچکتر از ۲۳۱ باشد که $۲۳۱ | a$ باشد $[a و ۲۳۱]$ وجود دارد؟ (رایانه خارج ۹۱)

۱۲۴ (۲)

۱۲۰ (۳)

۱۱۸ (۴)

۱۱۶ (۱)

ما داریم ابرک ۰.۳ م دو عدد را که حاصل ضرب آن ها شود دو عدد نسبت به هم اولند. با این در اینجا دنبال عددهای کوچکتر از ۲۳۱ هستیم که نسبت به ۲۳۱ اول باشند. یعنی $\phi(۲۳۱)$
 $۲۳۱ = ۳ \times ۷ \times ۱۱ \rightarrow \phi(۲۳۱) = ۲ \times ۶ \times ۱۰ = ۱۲۰$

۲۱۵- ۱۱ کیلوگرم زرد با علفات ۰.۵ درصد یا ۰.۵ کیلوگرم زرد از همان نوع با علفات ۰.۷ درصد قلمی زرد اند. با این چند کیلوگرم آن علفات را می توان ۰.۵ درصد کرد؟ (رایانه خارج ۹۲)

۱۴ (۱)

۱۳ (۲)

۱۵ (۳)

۱۶ (۴)

وزن اول $w_1 = ۱۱$ kg وزن دوم $w_2 = ۷$ kg
 وزن رتف حاصل $m_1 = ۰.۷ \times ۱۱ = ۰.۷۷$ kg وزن رتف حاصل $m_2 = ۰.۷ \times ۷ = ۰.۴۹$ kg

وزن کل $w = w_1 + w_2 = ۱۸$ kg وزن کل $m = m_1 + m_2 = ۱.۲۶$ kg

$$۱۵ - ۱.۲۶ = ۱۳.۷۴$$

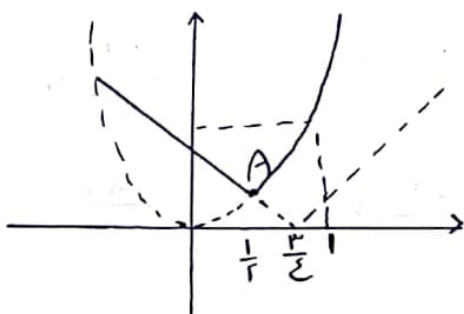
۲۲۲- اگر $\left| \frac{۳}{۲} - x \right|$ و x^2 کمترین مقدار را بگیرد $f(x) = \max$ باشد کمترین مقدار را بگیرد $f(x)$ کدام است؟ (رایانه خارج ۹۳)

۱/۲ (۱)

۳/۴ (۲)

۱/۳ (۳)

۱/۴ (۴)



$$A: \begin{cases} y = x^2 \\ y = -(x - \frac{3}{2}) \end{cases} \rightarrow x^2 = -x + \frac{3}{2} \rightarrow x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \rightarrow A = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \min(f) = \frac{1}{2}$$

طول نقطه‌ای متقاطع است

۲۲۷- اگر $x > 2$ ، $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ باشد، فقط تمام بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن محور

محاسبه آردم طول مقطع می‌کنیم (رایحه خارج ۹۲)

۱۶ (۱۴)

۱۲ (۳)

۱۲ (۲)

۱۰ (۱)

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \xrightarrow{f(x)=1} 1 = \frac{2x-1}{x+2} \rightarrow x+2 = 2x-1 \rightarrow x=3 \rightarrow f(3)=1$$

$$(3, 1) \in f \rightarrow (1, 3) \in f^{-1}$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} \rightarrow f'(3) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

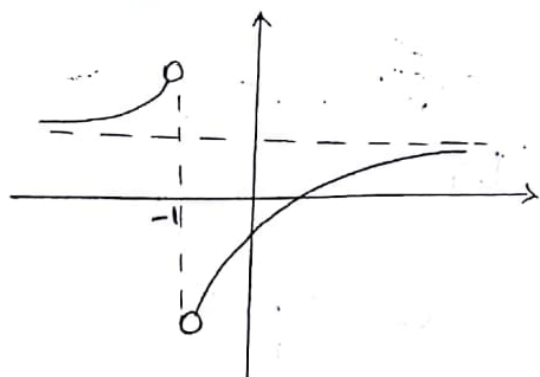
$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

سبب فقط تمام بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن محور است (رایحه خارج ۹۲)

$$m = -\frac{1}{(f^{-1})'(1)} = -\frac{1}{5}$$

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - 1) \xrightarrow{\text{تقاطع با محور } x} -3 = -\frac{1}{5}(x - 1) \rightarrow x = 17$$

۲۲۸- شکل مقابل نمودار تابع $y = \tan^{-1} x$ است. $U(x)$ برابر کدام است (رایحه خارج ۹۲)



$$\frac{1+x}{1-x} \quad (۲)$$

$$\frac{1-x}{1+x} \quad (۱)$$

$$\frac{x-1}{x+1} \quad (۴)$$

$$\frac{x+1}{x-1} \quad (۳)$$

مطابق شکل $n=1$ عضو دافندی تابع y نمی باشد پس با توجه به ترتیبی خاص که در دنباله y هست تنها در $n=1$ و $n=2$ $n=1$ جز دافندی $U(n)$ نیست. هم چنین با توجه به نمودار $\langle y \rangle$ است که بین n و $n+1$ فقط n در y تابل قابل است.

$$y = \tan^{-1}(U(n)) \rightarrow y' = \frac{U'(n)}{1+U^2(n)} \quad \langle y \rangle \rightarrow U'(n) > 0$$

کاهش از صفر

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ترتیبی 1} : U(n) = \frac{-n+1}{n+1} \rightarrow U'(n) = \frac{-2}{(n+1)^2} < 0 \quad \times \\ \text{ترتیبی 2} : U(n) = \frac{n-1}{n+1} \rightarrow U'(n) = \frac{2}{(n+1)^2} > 0 \quad \checkmark \end{array} \right.$$

۲۲۹- در اثبات هم $\sqrt{k} > \sqrt{k+1}$ اصل استقرای تقیم باینده از تمام نامساوی لایحه استاده می شود؟
(ریاضی خارج ۹۲)

$$\begin{array}{ll} \text{1} \checkmark & k \geq 0; \sqrt{k} > \sqrt{k+1} \\ \text{2} & k \geq 1; \sqrt{k} > \sqrt{k+1} \\ \text{3} & k \geq 3; \sqrt{k} > \sqrt{k+1} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P(k): \sqrt{k} > \sqrt{k+1}; k \geq 0 \\ P(k+1): \sqrt{k+1} > \sqrt{k+2}; k+1 \end{array} \right.$$

$$P(k) : \sqrt{k} > \sqrt{k+1} \xrightarrow{\times (k+1)} (k+1) > (k+1)\sqrt{k}$$

باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(k+1) > \sqrt{k} \rightarrow k > \sqrt{k}, k \geq 0$$

۲۳۰- هر زیر مجموعه n عضوی از $\{1, 2, \dots, 13\}$ و 3 و 13 را $A =$ به طور معین حداقل دو عضو دارد که مجموع آن دو عضو 13 می باشد. حداقل n کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۹۱) ۱۰۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴)

$\{1, 2, 3, \dots, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$

حقیقت اصل لانه کوچک 13 عضو از A اینجاست که 6 در بین اعضای آنجا به حداقل دو عضو دارد

$$\min(n) = 13$$

۲۳۱- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 3x\}$ باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A سره

و زیرمجموعه‌های $A-B$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱۲۱۲

۲ (۳) ✓

ع ۱۳

۲ (۱)

$$x^2 + 1 = 3x \rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x = 1, 2 \rightarrow B = \{1, 2\}$$

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\} - \{1, 2\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$$

$$2^n - 2 = 2^3 - 2 = 2 \rightarrow 2^n = 4 \rightarrow n = 2$$

۲۳۲- رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 2, x \neq y\}$ چند عضو دارد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱۷. ۱۴

۱۵ (۳)

ع ۱۴

۱۲ (۱)

$$|x| \leq 2: \begin{cases} x=0: & y \in \{-2, -1, 1, 2\} \\ x=\pm 1: & y \in \{-2, -1, 1, 2\} \setminus \{x\} \\ x=\pm 2: & y \in \{-2, -1, 1, 2\} \setminus \{x\} \end{cases}$$

$$1 + 4 + 4 = 9$$

۲۳۳- به ازای چند عدد صحیح n دو عدد طبیعی $9n+2$ و $11n-5$ نسبت به هم غیر اول هستند؟ (ریاضی خارج ۹۲)

ع ۱۲

۳ (۱۳)

ع ۱۲

ع ۱۲

۱ (۱) ✓

$$\begin{cases} d | 11n - 5 \xrightarrow{x^9} d | 99n - 45 \\ d | 9n + 2 \xrightarrow{x^{11}} d | 99n + 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d | 27 \xrightarrow{d \neq 1} d = 27$$

$$\rightarrow 11n - 5 = 27k \rightarrow 11n = 27 + 5k \rightarrow k + 5 = 11k' \rightarrow k = 11k' - 5$$

$$\rightarrow 11n - 5 = 27(11k' - 5) \rightarrow 11n = 27 \times 11k' - 27 \times 5 + 5 \xrightarrow{\div 11} n = 27k' - 3$$

تعداد صحیح $n = 37$ تا $n = 100$ که $k = 1$ در رابطه $n = 27k - 3$ برقرار است.

۲۳۴- اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot (\sqrt[3]{2+\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{2-\sqrt{3}})^{\frac{2}{3}}$ به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد A کدام است؟ (رایانه خارج ۹۳)

$\sqrt{2}+1$ (۴) 2 (۲) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{2}-1$ (۱)

$$(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{A} \quad \xrightarrow{\text{مربع کردن}} \quad (\sqrt{2}-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{2} = A$$

$$\rightarrow A = ((\sqrt{2}-\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} \times \sqrt[3]{2}) \times ((\sqrt{2}-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}) = \sqrt{2-2\sqrt{3}} \times \underbrace{(\sqrt{2} - (\sqrt{3})^2)^{\frac{2}{3}}}_1$$

$$\rightarrow A = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} = |\sqrt{2}-1| = \sqrt{2}-1$$

۲۳۵- حاصل عبارت $\frac{t^8 - t^7 + t^6 - \dots - t + 1}{t^2 - t^3 + 1}$ به ازای $t = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ کدام است؟ (رایانه خارج ۹۳)

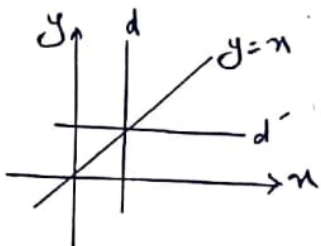
2 (۴) 0 (۲) 2 (۲) 3 (۱)

$$\frac{t^8 - t^7 + t^6 + \dots - t + 1}{t^2 - t^3 + 1} = \frac{\frac{t^9 + 1}{t + 1}}{\frac{t^3 + 1}{t^2 + 1}} = t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{t})^2 + \frac{3}{2} =$$

$$(\frac{1+\sqrt{17}}{2} - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} = \frac{17}{2} + \frac{3}{2} = 10$$

۲۳۶- اگر دو خط به معادلات $ax+by=1$ و $2x-3y=b$ نسبت به یکدیگر موازی باشند $a+b$ کدام است؟ (رایانه خارج ۹۳)

$-2, 2$ (۲) $2, -2$ (۳) ± 2 (۲) ± 3 (۱)



$$\begin{cases} ax+by=1 \rightarrow m_1 = -\frac{a}{b} \\ 2x-3y=b \rightarrow m_2 = \frac{2}{3} \end{cases} \quad \text{اگر } m_1 = \frac{1}{m_2} \rightarrow -\frac{a}{b} = \frac{3}{2} \rightarrow a = -\frac{3}{2}b \quad (1)$$

پس $y=x$ متعامد بر d است \rightarrow

$$\begin{cases} ax+bx=1 \rightarrow (a+b)x=1 \\ 2x-3x=b \rightarrow x=-b \end{cases} \rightarrow (a+b)(-b)=1 \quad (2)$$

$$\frac{(1) \text{ و } (2)}{\rightarrow} \left(-\frac{3}{2}b + b\right)(-b) = 1 \rightarrow \frac{b^2}{2} = 1 \rightarrow b^2 = 2 \rightarrow b = \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} b = \sqrt{2} \xrightarrow{(1)} a = -\sqrt{2} \\ b = -\sqrt{2} \xrightarrow{(1)} a = \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow a + b = \pm 2$$

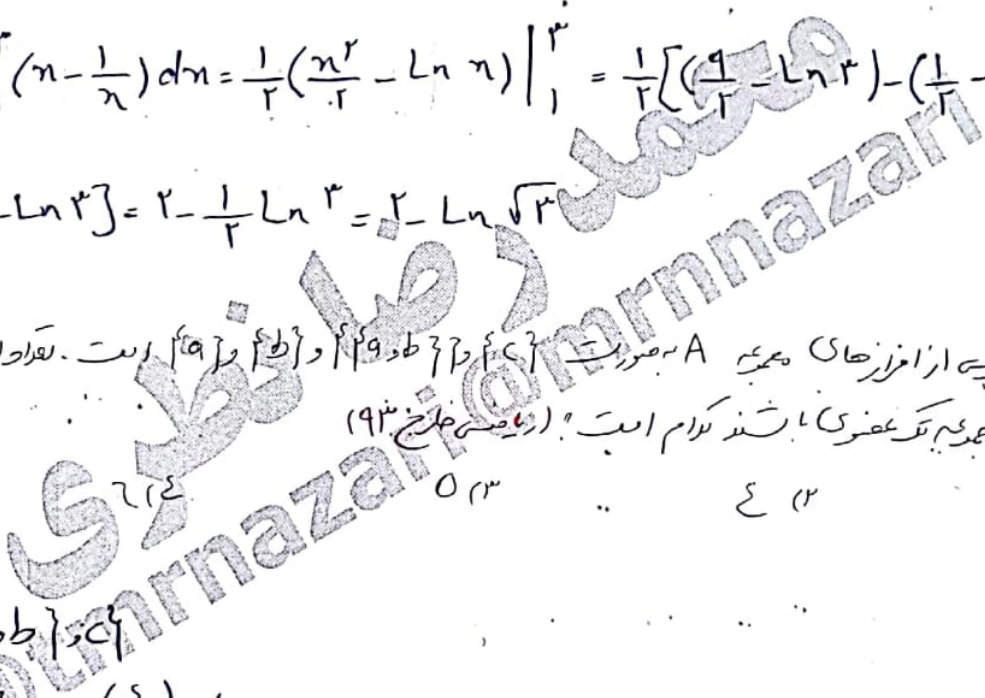
۲۳۷- مانتین تابع فاکتوری $f(n) = \frac{n^2 - 1}{n}$ ریاضی [آوا] کدام است؟ (ریاضی مطرح ۹۳)

۱) $2 - \ln \sqrt{3}$ ۲) $3 - \ln 3$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{5}{4}$

$$\bar{F} = \frac{1}{3-1} \int_1^3 \left(n - \frac{1}{n}\right) dn = \frac{1}{2} \left(\frac{n^2}{2} - \ln n\right) \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{9}{2} - \ln 3\right) - \left(\frac{1}{2} - \ln 1\right)\right]$$

$$\rightarrow \bar{F} = \frac{1}{2} [2 - \ln 3] = 1 - \frac{1}{2} \ln 3 = 1 - \ln \sqrt{3}$$

۲۳۸- بیست از افزارهای مهم A به صورت {C} و {D} و {E} است. تعداد افزارهای صحیح AC که فاقد هر یک از اعضای باشند کدام است؟ (ریاضی مطرح ۹۳)



۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴)

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$$

$$\begin{cases} \boxed{\dots} \rightarrow \binom{2}{2} = 1 \\ \boxed{\dots} \rightarrow \frac{\binom{2}{2} \binom{2}{2}}{2!} = 3 \end{cases}$$

ع: تعداد افزارها

۲۳۹- رابطه $ab \leftrightarrow cd$ در $(a, b)R$ و $(c, d)R$ صحیح است. آیا این رابطه هم ارزی است در صورت هم ارزی بودن فاکتور $[(a, b)]$ ؟ (ریاضی مطرح ۹۳)

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هم ارزی نیست

(۱) $\forall (a, b) \in R^2: ab = ab \rightarrow (a, b)R(a, b)$ صحیح است

(۲) $(a, b)R(c, d): ab = cd \rightarrow cd = ab \rightarrow (c, d)R(a, b)$ قانع

$$(۳) \begin{cases} (a,b) R(c,d) : ab=cd \\ (c,d) R(e,f) : cd=ef \end{cases} \rightarrow ab=ef \rightarrow (a,b) R(e,f) \quad \checkmark \text{ راسته است}$$

$$[۱۴] \{ (m,y) \in \mathbb{R} \mid ny=2 \} \quad \begin{matrix} n=2 \rightarrow y=1 \\ n=3 \rightarrow y=2/3 \\ n=4 \rightarrow y=1/2 \end{matrix}$$

۱۴- چندین سوابق ساده و مفید وجود دارد که مجموع مرتبه و اندازه آن ۹ باشد! (رایضه فارح ۹۳)

۲ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

$$p+q=9$$

p	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

تغییرات

۱۴- عددش رتبه ababab را که حاصل ضرب ۱۱۱ در مربع کامل یک عدد ساده است. مجموع دورتم a و b کدام است؟ (رایضه فارح ۹۳)

۷ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \dots + \overline{ab} \dots + \overline{ab} = \overline{ab} \times (10000 + 1000 + 100 + 1) = \overline{ab} \times 11111$$

با توجه به تجزیه ۱۱۱۱۱ = ۳ × ۳۷ × ۱۰۱۰۱ و ۱۰۱۰۱ = ۳ × ۷ × ۱۳ × ۳۷

$$\overline{ababab} = 11111 \times k^2 \rightarrow \overline{ab} \times 3 \times 7 \times 13 \times 37 = 3 \times 37 \times k^2 \rightarrow \overline{ab} \times 7 \times 13 = k^2$$

$$\rightarrow \overline{ab} = 7 \times 13 = 91 \rightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases} \rightarrow a+b=10$$

۱۴۲- اگر $(abc)_v = (a \circ cb)_e$ آنگاه مجموع ارقام غیر صفر a, b, c کدام است؟ (رایضه فارح ۹۳)

۸ (۴) ۷ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

$$(abc)_v = (a \circ cb)_e \rightarrow 29a + 7b + c = 74a + 0 + 2c + b \rightarrow 2b - 45a = 3c$$

$$\rightarrow 3, c = 2b - 5a$$

از آنجا که a و b و c ارقام غیر صفر در مبنای ۱۰ هستند پس $2 < c < 9$ و $a < 9$ و $b < 9$

$$b=3, a=1 \rightarrow a+b+c=1+3+1=5$$

۲۴۳- به ازای چند عدد طبیعی دوری n دو عدد همسرت $5n+2$ و $13n-3$ نسبت به هم غیر اولند؟
 خارج ۹۳

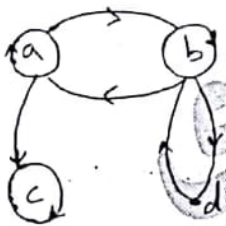
ب. م. م. خود $5n+2$ و $13n-3$ را در نظر بگیریم:

$$(5n+2, 13n-3) = d \rightarrow \begin{cases} d \mid 5n+2 \xrightarrow{\times 13} d \mid 75n+26 \\ d \mid 13n-3 \xrightarrow{\times 5} d \mid 65n-15 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} d \mid 27 \xrightarrow{d \nmid 27} d = 1$$

$$5n+2 \equiv 0 \pmod{27} \rightarrow 5n \equiv -2 \pmod{27} \xrightarrow{\times 13} 65n \equiv -26 \pmod{27} \rightarrow -2n \equiv -52 \pmod{27}$$

$$\xrightarrow{\div (-2)} n \equiv 26 \pmod{27} \xrightarrow{\text{عدد صحیح دوری}} \begin{cases} n = 26 \\ n = 26 + 27 = 93 \end{cases}$$

۲۴۴- گراف جهت طریقی R روی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ به صورت زیر است. ماتریس $M(R \circ R)$ چند برابر دارد؟
 خارج ۹۳



$$M(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M(R \circ R) = (M(R))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۴۵- اگر عبارت $x^2 + ax^2 - bx + 2$ بر $(x-1)^2$ بخش پذیر باشد، a و b برابر است؟ (بیاضه خارج ۹۳)

عبارت $P(x) = x^2 + ax^2 - bx + 2$ را در نظر بگیریم. واضح است که $P(1) = 0$ و $P'(1) = 0$. بنابراین:

$$P(1) = 1 + a - b + 2 = 0 \rightarrow a - b = -3$$

$$P'(1) = 2 + 2a - b = 0 \rightarrow a - b = -2$$

از اصل دستگاه برداشت کرده داریم: $b = 2$

۲۴۶- اگر زاویه بین مماس و عمود بر وتر راست بر منوط آن تابع با تابعی $f(x) = [2 + \cos \frac{\pi}{4}] \sin 2x$ در نقطه $x=1$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

$$\frac{2}{5} \text{ (ع)}$$

$$\frac{2}{9} \text{ (ب)}$$

$$\frac{1}{5} \text{ (د)}$$

$$\frac{1}{9} \text{ (ا)}$$

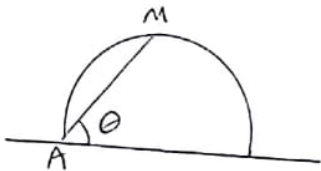
$$f(x) = [2 + \cos \frac{\pi}{4}] \sin 2x$$

$$m_1 = f'(x)^+ = 2 \cos 2x = 2$$

$$m_2 = f'(x)^- = 2 \times 2 \cos 2x = 4$$

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{2 - 4}{1 + 2 \times 4} \right| = \frac{2}{9}$$

۲۴۷- نقطه M بر روی نیم دایره AB به طول $AB=1$ با سرعت ثابت از A به سمت B حرکت می‌کند. در آن لحظه از نقطه A دور M در جهت $MAB = \theta$ در لحظه $MA=2$ کدام است؟



سرعت M 10 است
 سرعت A 5 است

$$A = (-\delta, 0), M = (x, \sqrt{r^2 - x^2})$$

$$L = AM = \sqrt{(x + \delta)^2 + r^2 - x^2} = \sqrt{1 \cdot x + \delta}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{1 \cdot x + \delta}} \times \frac{dx}{dt} = \frac{r}{1} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\sqrt{1 \cdot x + \delta}}{r}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1} \sqrt{\frac{r^2}{x^2} - 1}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dx} \times \frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{1 \cdot x + \delta}}{r^2 x \sqrt{\frac{r^2}{x^2} - 1}}$$

$$\text{در لحظه } MA=2 \rightarrow \sqrt{1 \cdot x + \delta} = 2 \rightarrow x = -\frac{v}{\delta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-\sqrt{1 \cdot (-\frac{v}{\delta}) + \delta}}{r^2 (-\frac{v}{\delta}) \sqrt{\frac{r^2}{(-\frac{v}{\delta})^2} - 1}} = \dots$$

۲۴۸- حاصل $\sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2} x^3 \sqrt[4]{2} x^4 \sqrt[4]{2} x^4 \sqrt[4]{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)
 ۱ $\sqrt[4]{2}$ ۲ $\sqrt[4]{32}$ ۳ $\sqrt[4]{9}$ ۴ $\sqrt[4]{2}$

۲۴۹- نمودار تابع $y = \sin(\tan^{-1} x)$ و ضرایب معادری $mm = \frac{1}{m}$ به ازای کدام معادری m در 3 متر است؟ (ریاضی خارج ۹۵)
 ۱ $1 < m < 2$ ۲ $1 < m < 1$
 ۳ $0 < m < 1$ ۴ $1 < m < 0$

۲۵۰- اندازه زاویه خارجی یک مثلث قائم الزامی با سرعت ثابت $\frac{1}{4}$ رادیان بر ثانیه کاهش میابد. اگر طول وتر آن ثابت و برابر ۱۰ واحد باشد و در آن اندازه زاویه داده $\frac{\pi}{7}$ برسد سرعت تغییر مساحت مثلث کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)
 ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{16}$

۲۵۱- مابین تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2}$ و $g(x) = \frac{x}{x+2}$ در $x = \frac{5}{2}$ است. کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)
 ۱ $\frac{7}{2}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۲۵۲- با استفاده از دوام استواری معین کنیم که نتیجه چیست است؟ (ریاضی خارج ۹۵)
 ۱ شعری ۲ تفسیری ۳ استواری ۴ استواری

